

## Temat: Prawo Hooke'a. Oscylacje harmoniczne.

Zagadnienia: prawa dynamiki Newtona, siła sprężysta, prawo Hooke'a, oscylacje harmoniczne, okres oscylacji.

Koncepcja: Sprężyna obciążona różnymi masami wydłuża się – badane jest wydłużenie w funkcji siły obciążającej. Masa zawieszona na sprężynie, wytrącona z pionowego położenia równowagi, wykonuje oscylacje harmoniczne – okres oscylacji zależy od rodzaju sprężyny i masy obciążającej.

### Zadania:

- A. Wyznaczanie zależności pomiędzy wydłużeniem sprężyny i siłą obciążającą, dla dwóch różnych sprężyn.
- B. Badanie okresu oscylacji ciężarka zawieszonoego na sprężynie w funkcji masy obciążającej dla dwóch rodzajów sprężyn.

### Układ pomiarowy i procedura wykonania.



**Rys.1.** Układ doświadczalny badania wydłużenia sprężyny i oscylacji harmonicznych.

W zestawie doświadczalnym znajduje się komplet odważników  $10\text{g} \div 200\text{g}$ , szalka o masie  $10\text{g}$  oraz dwie różne sprężyny o następujących parametrach:

	<i>symbol</i>	<b>Spr. 1</b>	<b>Spr. 2</b>
średnica zwoju sprężyny:	$D$	31,2 mm	9,0 mm
grubość drutu:	$d$	0,80 mm	0,60 mm
ilość zwojów:	$N$	42	100
masa sprężyny	$m_s$	16,8 g	5,8 g

### Zadanie A

- A.1. Dla swobodnie wiszącej sprężyny (bez szalki) odczytujemy za pomocą skali milimetrowej położenie końca (dolnego) sprężyny i rejestrujemy jako wartość  $l_0$  w tabeli (w pozycji obciążenia  $m = 0$  - patrz Rys.2 na str.5).
- A.2. Dla sprężyny obciążonej masą  $m$  odczytujemy na skali położenie tego samego końca i rejestrujemy jako wartość  $l$  w tabeli. Masa samej szalki wynosi 10 g.
- A.3. Pomiary A.2 powtarzamy dla kolejnych obciążeń  $m$  wzrastających co 20 g. Wyniki rejestrujemy w tabeli:

$m$ [g]	Spr. (a)		Spr. (b)	
	$l$ [mm]	$x = l - l_0$ [mm]	$l$ [mm]	$x = l - l_0$ [mm]
0	$l_0 = \dots\dots\dots$	0		0
20				
40				
200				

- A.4. Pomiary A.1 i A.3 powtarzamy dla drugiej sprężyny.
- A.5. Dla każdej z badanych sprężyn wykonujemy pomiar wydłużenia przy obciążeniu ciężarkiem o nieznannej masie  $m$  zapisując wyniki w tabelce:

Spr. (a)		Spr. (b)	
$l$ [mm]	$x = l - l_0$ [mm]	$l$ [mm]	$x = l - l_0$ [mm]

- A.6. W ramach opracowania wyników sporządzamy na podstawie otrzymanych pomiarów wykresy zależności  $x(m)$  wydłużenia sprężyny w funkcji masy obciążającej – punkty pomiarowe.
- A.7. Wykorzystując algorytm obliczeniowy regresji liniowej wyznaczamy współczynniki kierunkowe zależności liniowych  $x(m)$  i nanosimy te linie proste na tym samym wykresie. Na podstawie tych wartości wyznaczamy współczynniki sprężystości sprężyn  $k$ . Niepewność pomiaru wyznaczanych wartości szacujemy zgodnie z procedurą opisaną w opracowaniu – wzory (7).
- A.8. Wykorzystując obliczone wartości współczynników sprężystości oraz zależność  $x(m)$  obliczamy masę nieznaną ciężarków w oparciu o pomiary w pkt. A.5.

Zadanie B

- B.1. Dla pierwszej z badanych sprężyn, obciążamy ją wybranym odważnikiem  $m$  i odciągamy na niewielką odległość w dół, a następnie puszcamy tak, aby otrzymać oscylacje – ważne, aby oscylacje odbywały się w pionie.
- B.2. Dokonujemy pomiaru czasu  $t$  trwania 20 kolejnych cykli oscylacji, wybierając jako chwilę ‘zero’ mierzenia czasu najniższe położenie oscylującego odważnika. Jeden cykl oscylacji (okres  $T$ ), to odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi np. najniższymi położeniami.
- B.3. Pomiarzy B.2 powtarzamy dla kolejnych obciążeń  $m$  wzrastających co 20 g. Masa samej szalki wynosi 10 g. Wyniki rejestrujemy w tabeli:

$m$ [g]	Spr. (a)			Spr. (b)		
	$t = 20 \cdot T$ [s]	$T$ [s]	$T^2$ [s <sup>2</sup> ]	$t = 20 \cdot T$ [s]	$T$ [s]	$T^2$ [s <sup>2</sup> ]
40						
60						
.....						
.....						
200						

- B.4. Powtarzamy pomiary B.1 i B.3 dla drugiej sprężyny.
- B.5. W ramach opracowania wyników sporządzamy na podstawie otrzymanych pomiarów wykresy zależności  $T^2(m)$  kwadratu okresu oscylacji w funkcji masy obciążającej – punkty pomiarowe.
- B.6. Wykorzystując algorytm obliczeniowy regresji liniowej wyznaczamy współczynniki kierunkowe oczekiwanych zależności liniowych  $T^2(m)$  i nanosimy te linie proste na tym samym wykresie. Na podstawie tych wartości wyznaczamy współczynniki sprężystości sprężyn  $k$ . Niepewność pomiaru wyznaczanych wartości szacujemy zgodnie z procedurą opisaną w opracowaniu – wzory (19).
- B.7. Na wykresie przedstawiamy wyniki pomiarów ( $T$ ,  $m$ ) oraz przewidzianą teorią zależność  $T(m)$ , obliczoną w oparciu o otrzymane z pomiarów parametry układu,
- B.8. Dla każdej z badanych sprężyn, w oparciu o otrzymaną zależność  $T^2(m)$  obliczoną na podstawie pomiarów, wyznaczamy taką masę ciężarka obciążającego, aby okres jego oscylacji na wybranej sprężynie wynosił dokładnie  $T = 1$  s.

**Informacja dodatkowa dla Zadań A i B**

Przy wyznaczaniu (w oparciu o wyniki pomiarów) niezbędnych parametrów  $a$  i  $b$  poszukiwanej zależności liniowej (regresji liniowej) oraz odpowiadających im estymat odchyleń standardowych można posłużyć się funkcją regresji liniowej REGLINP w arkuszu kalkulacyjnym typu MS Excel lub innym. Przykładowo, dla prostej  $y = a \cdot x$  z wymuszonym punktem (0, 0) jest to funkcja **REGLINP(znane\_Y;znane\_X;0;1)**, natomiast dla prostej  $y = a \cdot x + b$  podobna funkcja **REGLINP(znane\_Y;znane\_X;1;1)** – REGLINP jest funkcją tablicową, czyli dającą w odpowiedzi tablicę wartości wynikowych.

Odwołanie do wartości parametrów w tablicy wyników funkcji REGLINP można zrealizować za pomocą funkcji **INDEKS(tablica;nr\_wiersza;nr\_kolumny)**.

Współczynniki rozszerzenia $k_p$ dla różnych ilości $\nu$ stopni swobody oraz poziomu ufności $p = 95,45\%$													
$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	$\infty$
$k_p$	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,32	2,28	2,13	2,05	2

### Teoria i wyniki pomiarów.

Współcześnie formułuje się prawo Hooke'a (XVII w.) w rozszerzonej postaci obejmującej różne rodzaje deformacji sprężystych: poprzecznych, podłużnych i skrętnych. Jednakże w przypadku pręta rozciąganego siłą zewnętrzną  $F^{\text{zewn}}$ , jego wydłużenie względne opisywane jest prawem najbliższym pierwotnej wersji prawa Hooke'a ("Jakie wydłużenie, taka siła" – "Ut tensio, sic vis"):

$$F = -Y \cdot S \cdot \frac{\Delta l}{l} , \quad (1)$$

gdzie  $l$  jest długością pręta,  $\Delta l$  jego bezwzględnym wydłużeniem,  $S$  polem powierzchni przekroju poprzecznego, a  $F$  oznacza siłę sprężystą, którą należy zrównoważyć siłą rozciągającą  $F^{\text{zewn}}$ . Występujący we wzorze (1) symbol  $Y$  oznacza tzw. moduł Younga, który jest miarą własności sprężystych materiału przy deformacjach podłużnych podczas rozciągania i ściskania.

Sprężyna wykonana z pręta sprężystego zwiniętego w kształt linii śrubowej jest bardziej złożonym obiektem niż prosty rozciągany pręt. Wydłużenie sprężyny przy jej rozciąganiu oznacza zwiększenie skoku linii śrubowej, co wiąże się ze skręcaniem pręta tworzącego zwoje (deformacja skrętna). Okazuje się jednak, że i w tym przypadku wydłużenie sprężyny skutkuje wystąpieniem siły sprężystej proporcjonalnej do samego wydłużenia – tzw. siła sprężysta opisana formułą:

$$F_s = -k \cdot x , \quad (2)$$

gdzie  $x = \Delta l = l - l_0$  oznacza wydłużenie sprężyny,  $l_0$  - długość swobodną,  $l$  - długość sprężyny rozciągniętej, natomiast  $k$  oznacza tzw. współczynnik sprężystości sprężyny. Współczynnik ten zależy od geometrycznych parametrów sprężyny (średnica  $D$ , ilość zwojów  $N$ ), od grubości  $d$  pręta tworzącego zwoje oraz od właściwości materiału pręta określonych przez tzw. moduł skręcalności  $G$ :

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot N \cdot D^3} . \quad (3)$$

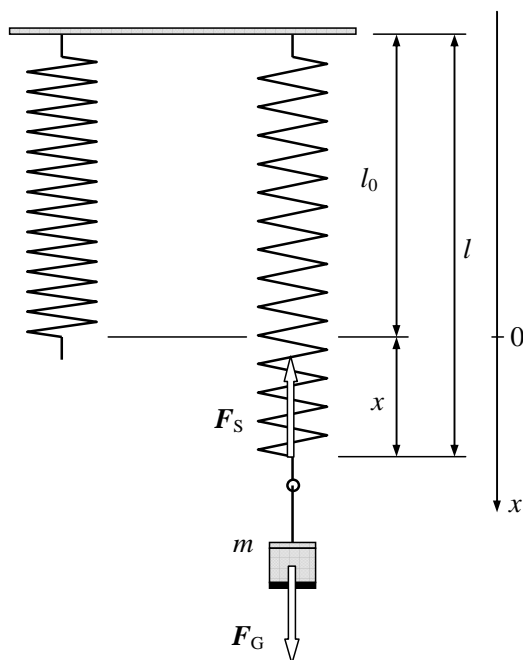
Obciążenie zawieszony pionowo sprężyny masą  $m$  powoduje jej wydłużenie  $x$  w takim stopniu, aby siła sprężysta sprężyny  $F_s$  zrównoważyła siłę grawitacji działającą na masę obciążającą  $m$  (Rys.2), a zatem:

$$\vec{F}_s + \vec{F}_G = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x + mg = 0 , \quad (4)$$

skąd wynika zależność pomiędzy wydłużeniem sprężyny a masą obciążającą:

$$x = \frac{g}{k} \cdot m , \quad (5)$$

gdzie  $g = 9,811 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  jest tzw. przyspieszeniem ziemskim (natężeniem pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi).



**Rys.2.** Pomiary wydłużenia  $x = l - l_0$  sprężyny obciążanej masą  $m$ . (nie jest ważne względem którego miejsca zmierzmy w pionie odległości  $l$  i  $l_0$ , natomiast musi to być ten sam punkt odniesienia)

**Zadanie A** polega na sprawdzeniu oczekiwanej zależności liniowej pomiędzy wydłużeniem sprężyny i siłą rozciągającą, co jest równoważne sprawdzeniu zależności liniowej pomiędzy wydłużeniem  $x$  a masą obciążającą  $m$  zgodnie ze wzorem (5). Przykładowe wyniki pomiarów zamieszczone zostały na wykresie Rys.3.

Na podstawie otrzymanych pomiarów (Rys.3) można stwierdzić, że spodziewana zależność liniowa dobrze opisuje wyniki eksperymentu. Dla pomiarów z Rys.3 dopasowano linię prostą  $Y = a \cdot X$  (zgodnie z równaniem (5), gdzie  $Y \equiv x$ ,  $X \equiv m$ ) najlepiej odpowiadającą otrzymanym wartościom – współczynniki dopasowania oraz oszacowane niepewności standardowe, jako równe estymatom odchyleń standardowych:

$$\text{sprężyna (a): } a = 3,181 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}, \quad u(a) = S_a = 0,014 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}, \quad n = 8$$

$$\text{sprężyna (b): } a = 0,477 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}, \quad u(a) = S_a = 0,0057 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}. \quad n = 7$$

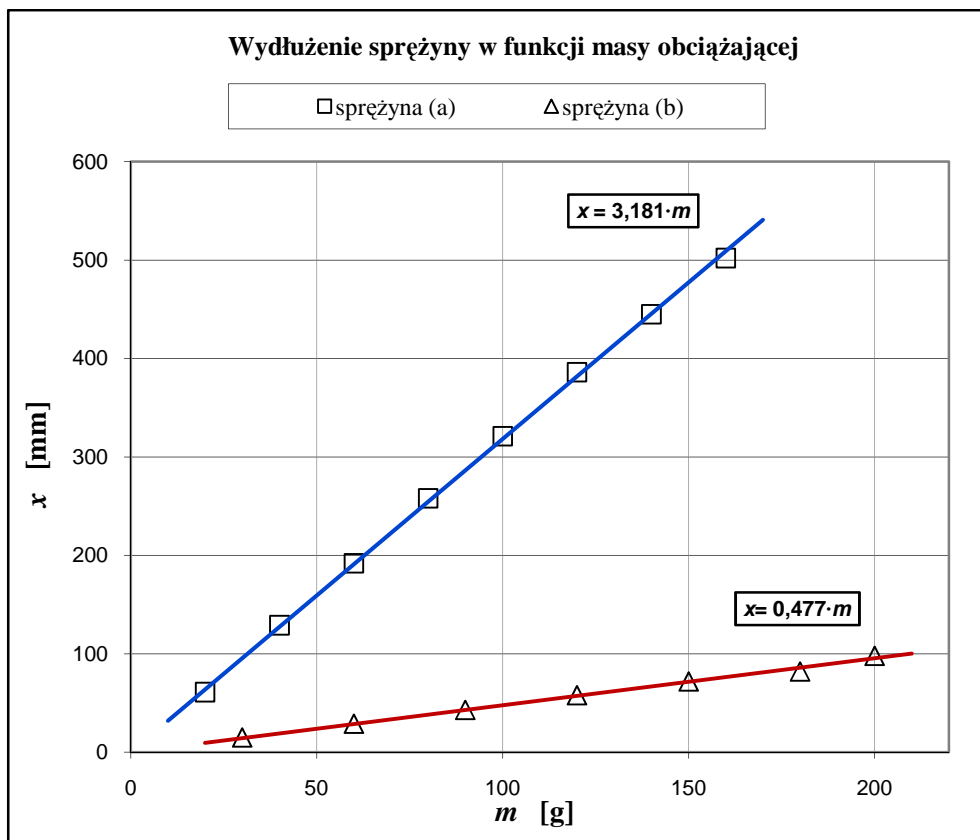
Przyrównanie współczynnika kierunkowego  $a$  do określającego go wyrażenia, wynikającego ze wzoru (5), pozwala na wyznaczenie współczynnika sprężystości  $k$  sprężyny (do obliczeń przyjąć należy wartości:  $g = 9,811 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $u(g) = 0,010 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ):

$$a = \frac{g}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{g}{a}, \quad (6)$$

a także na oszacowanie niepewności standardowej oraz rozszerzonej tak obliczonej wartości  $k$ , zgodnie z formułami:

$$u(k) = k \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(g)}{g}\right)^2}, \quad U(k) = k_p \cdot u(k) \quad (7)$$

gdzie współczynnik rozszerzenia  $k_p$  przy poziomie ufności  $p \approx 95\%$  przyjmuje wartości  $k_p = 2,43$  Spr(a) oraz  $k_p = 2,52$  Spr(b), dla liczby stopni swobody  $\nu = n - 1$ .



**Rys.3.** Wydłużenie  $x$  sprężyny w zależności od masy obciążającej  $m$ , dla dwóch różnych sprężyn.

W wyniku obliczeń, dla przytoczonych w przykładzie pomiarów, otrzymano następujące wartości współczynnika sprężystości i oszacowania niepewności rozszerzonej:

<i>sprężyna (a)</i>	$k = ( 3,084 \pm 0,034 ) \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ,$
---------------------	-----------------------------------------------------------

<i>sprężyna (b)</i>	$k = ( 20,57 \pm 0,63 ) \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} .$
---------------------	----------------------------------------------------------

Dla porównania otrzymanego wyniku z przewidywanym współczynnikiem sprężystości wynikającym ze wzoru (3) można obliczyć np. dla sprężyny ( Spr.(a) ) tę przewidzianą teorią wartość. Przyjmując do obliczeń, że moduł skręcalności materiału takiego, jak żelazo i stal wynosi około  $G = 8,1 \cdot 10^{10}$  Pa oraz podane parametry sprężyny, otrzymuje się wartość współczynnika sprężystości sprężyny równą  $k = 3,25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

W pomiarach otrzymano, że ciężarek o nieznannej masie zawieszony przykładowo na sprężynie (a) powodował jej wydłużenie o  $x = 350$  mm zmierzone z niepewnością maksymalną  $\Delta x = 1$  mm . W oparciu o wzór (5) oraz obliczoną już wartość współczynnika  $a$  wyznaczyć można masę  $m$  ciężarka, otrzymując wartość:

$m = ( 110,0 \pm 1,3 ) \text{ g}$
-----------------------------------

gdzie niepewność rozszerzoną oszacowano jako  $U(m) = k_p \cdot m \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2}$  wybierając współczynnik rozszerzenia odpowiedni dla liczby pomiarów stałej  $a$  .

**Zadanie B** wiąże się z badaniem dynamiki ruchu masy  $m$  zawieszanej na sprężynie w polu grawitacyjnym. Stan równowagi zawieszanej masy określa równowaga siły grawitacji i siły sprężystej (Rys.4):

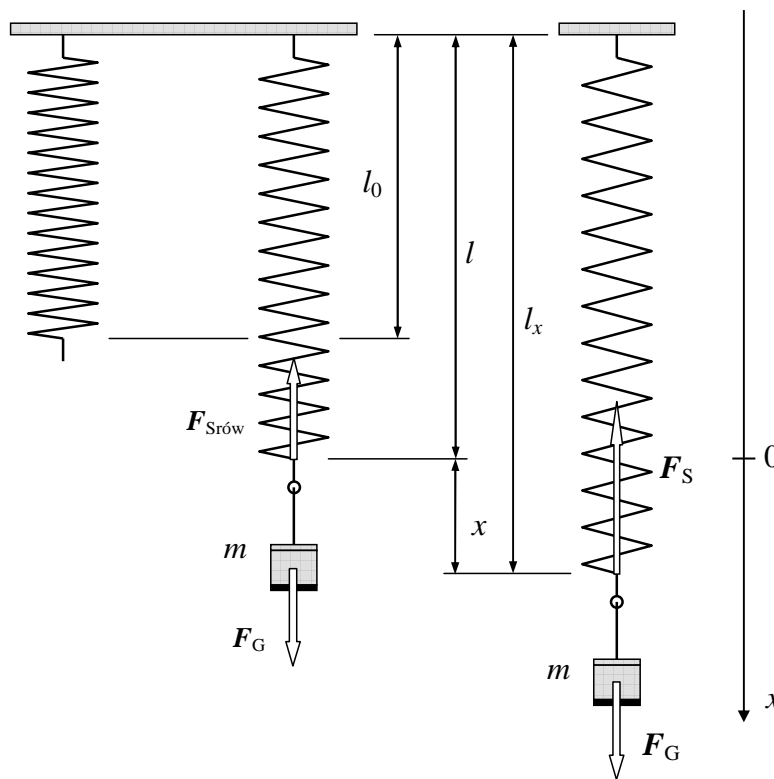
$$\vec{F}_{\text{Srow}} + \vec{F}_G = \vec{0} \Rightarrow -k \cdot (l - l_0) + mg = 0 \quad (8)$$

Jest to równowaga trwała, ponieważ każde wychylenie masy  $m$  w kierunku pionowym z położenia równowagi skutkuje wystąpieniem siły wypadkowej przeciwnie skierowanej do tego wychylenia (Rys.4):

$$\vec{F}_x = \vec{F}_S + \vec{F}_G \Rightarrow F_x = -k \cdot (l_x - l_0) + mg \quad (9)$$

Połączenie wzorów (8) i (9) pozwala wyrazić działającą na masę  $m$  siłę wypadkową w funkcji jej wychylenia  $x = l_x - l$  z położenia równowagi:

$$F_x = -k \cdot (l_x - l) = -k \cdot x \quad (10)$$



**Rys.4.** Opis położenia masy  $m$  odchylonej z położenia równowagi o  $x$ .

Zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona ruch masy  $m$  pod działaniem siły  $F_x = -k \cdot x$  (wzór (10)), przy pominięciu sił oporów ruchu oraz zaniedbaniu masy sprężyny, opisany jest równaniem:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x \quad (11)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja harmoniczna:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad , \quad (12)$$

gdzie  $A$  jest amplitudą oscylacji, natomiast  $\alpha$  oznacza tzw. fazę początkową – obydwie parametry ruchu zależą od warunków początkowych. Parametr  $\omega$ , tzw. częstość kołowa oscylacji, zależny jest od właściwości układu fizycznego i w przypadku masy oscylującej pod działaniem siły sprężystej wyraża się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \quad (13)$$

Otrzymane rozwiązanie (12) oznacza, że pod działaniem siły sprężystej  $F_x = -k \cdot x$  masa  $m$  wykonuje oscylacje harmoniczne o okresie  $T$  równym:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (14)$$

Powyższy wzór (14) określający zależność okresu oscylacji od zawieszony masy  $m$  oraz współczynnika sprężystości  $k$  otrzymany został bez uwzględnienia masy  $m_s$  samej sprężyny, która bierze jednak udział w ruchu. Próba uwzględnienia w sposób przybliżony masy  $m_s$  oscylującej sprężyny możliwa jest przez wprowadzenie poprawki we wzorze (14) sprowadzającej go do postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_{\text{eff}}}{k}} \quad , \quad (15)$$

gdzie tzw. masa efektywna sprężyny  $m_{\text{eff}}$ , przy założeniu  $m > m_s$ , daje się teoretycznie oszacować jako:

$$m_{\text{eff}} \approx \frac{m_s}{3} \quad . \quad (16)$$

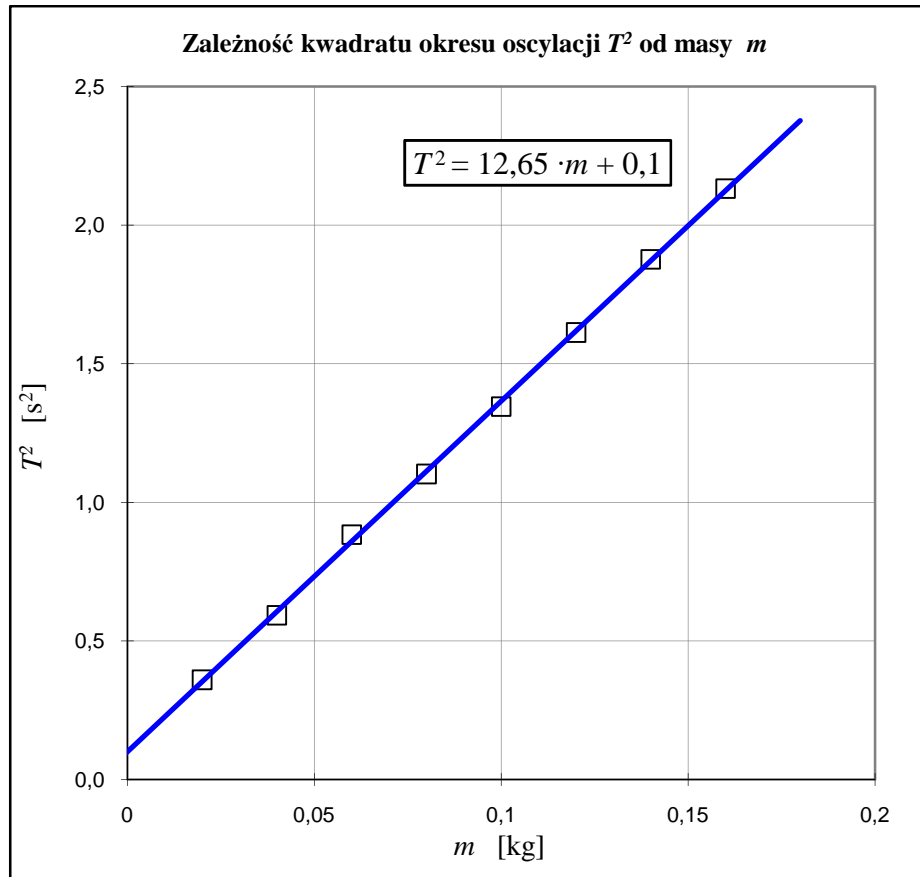
Ze wzoru (15) wynika, że dla określonej sprężyny kwadrat okresu oscylacji  $T^2$  powinien zmieniać się liniowo wraz z masą  $m$  obciążającą sprężynę, tzn.:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m + \frac{4\pi^2 \cdot m_{\text{eff}}}{k} = a \cdot m + b \quad . \quad (17)$$

Przykładowe wyniki pomiarów okresu oscylacji dla różnych mas zamieszczono na wykresie Rys.5. Regresja liniowa dopasowania prostej  $y = a \cdot x + b$  dla zależności pomiędzy kwadratem okresu  $T^2$  a masą  $m$  dla danych pomiarowych sprężyny Spr.(a) prowadzi do współczynników dopasowania oraz oszacowanych niepewności standardowych, jako równych estymatom odchyłeń standardowych:

$$\begin{aligned} a &= 12,65 \text{ s}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \quad , & u(a) &= S_a = 0,12 \text{ s}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \quad ; & n &= 8 \quad ; \\ b &= 0,100 \text{ s}^2 \quad , & u(b) &= S_b = 0,012 \text{ s}^2 \quad . \end{aligned}$$





**Rys.5.** Kwadrat okresu oscylacji  $T^2$  w zależności od masy obciążającej  $m$  dla sprężyny (a).

Przyrównanie współczynników  $a$  i  $b$  do określających je wyrażeń, wynikających ze wzoru (17), pozwala na wyznaczenie współczynnika sprężystości  $k$  sprężyny oraz masy efektywnej  $m_{\text{eff}}$  poprzez obliczenie:

$$a = \frac{4\pi^2}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{a} \quad \left| \quad b = \frac{4\pi^2 \cdot m_{\text{eff}}}{k} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{eff}} = \frac{b}{a} \right. \quad (18)$$

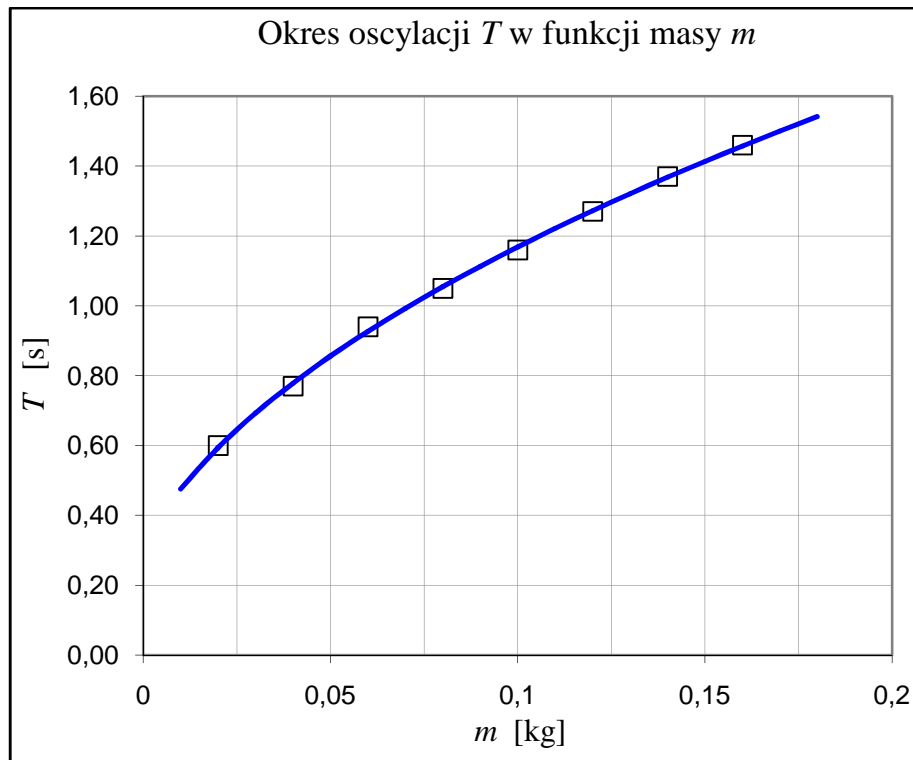
a także na oszacowanie niepewności standardowej oraz rozszerzonej tak obliczonych wartości  $k$  oraz  $m_{\text{eff}}$ , zgodnie z formułami:

$u(k) = k \cdot \frac{u(a)}{a}$	$U(k) = k_p \cdot u(k)$	(19)
$u(m_{\text{eff}}) = m_{\text{eff}} \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{A}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$	$U(m_{\text{eff}}) = k_p \cdot u(m_{\text{eff}})$	

gdzie współczynnik rozszerzenia  $k_p$  przy poziomie ufności  $p \approx 95\%$  przyjmuje wartość  $k_p = 2,52$  Spr(a), dla liczby stopni swobody  $\nu = n - 2 = 6$  w tym przykładzie.

Wyniki obliczeń dla przykładowych danych pomiarowych (sprężyna (a)) oraz oszacowania niepewności rozszerzonej są następujące:

$k = ( 3,121 \pm 0,075 ) \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ,$
$m_{\text{eff}} = ( 7,9 \pm 2,4 ) \text{ g} ,$



**Rys.6.** Wykres funkcji  $T(m)$  danej równaniem (15) oraz punkty pomiarowe dla sprężyny (a) – funkcja  $T(m)$  dana wzorem (15) bazuje na wartościach  $k$  oraz  $m_{\text{eff}}$  obliczonych na podstawie pomiarów.

Na wykresie Rys.6 wykreślone są punkty pomiarowe okresu  $T$  oraz dana równaniem (15) funkcja  $T(m)$  opisująca zależność okresu od masy – funkcja ta obliczana jest dla wartości  $k = 3,121 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  oraz  $m_{\text{eff}} = 0,0079 \text{ kg}$ . Jak to jest widoczne z wykresu, otrzymane na podstawie modelu matematycznego parametry fizyczne układu pozwalają na dobry opis otrzymanych w pomiarach wartości okresu oscylacji.

Masa ciężarka, dla którego sprężyna (Spr. (a)) wykonywać będzie oscylacje o okresie  $T = 1 \text{ s}$ , obliczona na podstawie wzoru (17), przy znanych wartościach  $a$  i  $b$ , wynosi:

$$m_{1s} = (71,2 \pm 1,7) \text{ g}$$

gdzie niepewność rozszerzoną oszacowano jako  $U(m_{1s}) = k_p \cdot \sqrt{\left(\frac{u(b)}{a}\right)^2 + \left(m_{1s} \cdot \frac{u(a)}{a}\right)^2}$  wybierając współczynnik rozszerzenia odpowiedni dla liczby pomiarów stałych  $a$ ,  $b$ .

### Literatura

H. Szydłowski – Pracownia Fizyczna, PWN Warszawa 1973 i późn.

J. Orear – Fizyka, T.1 i 2, WNT Warszawa 1990

R.Resnick, D.Halliday, J.Walker – Podstawy fizyki,

Materiały pomocnicze dostępne w formie elektronicznej:

- Instrukcje opisujące algorytm opracowania wyników pomiaru,
- Jednostki, stałe fizyczne, liczby,
- Metody oszacowania niepewności pomiaru.