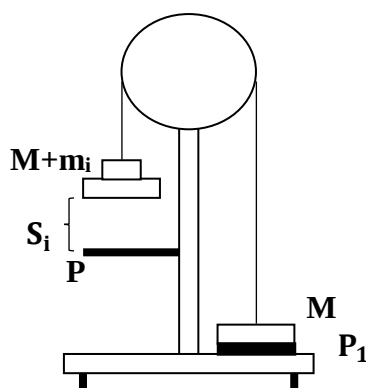


M1

BADANIE RUCHU JEDNOSTAJNIE ZMIENNEGO PRZY POMOCY MASZYNY ATWOODA

Zestaw przyrządów: Maszyna Atwooda, obciążniki, sekundomierz, miarka milimetrowa.



CZĘŚĆ 1

I. Wykonanie pomiarów:

1. Ustawić podstawkę P w takim położeniu aby droga S_1 (w sytuacji gdy ciężarek M po prawej stronie spoczywa na podstawce P_1) była równa około 20 cm.
Drogę należy mierzyć z dokładnością do 1mm, od dolnej krawędzi ciężarka M do górnej krawędzi platformy P.
2. Na ciężarek M znajdujący się po stronie podstawki P nałożyć jeden z dodatkowych obciążników m_i (np. 5.00g)
3. Zmierzyć pięciokrotnie czas ruchu mas ($M + m_i$), włączając stoper równocześnie z chwilą rozpoczęcia ruchu ciężarków a wyłączając z chwilą uderzenia mas w podstawkę.
4. Powtórzyć cały cykl pomiarowy opisany w punkcie 3 dla wybranej masy m_i i dla kolejnych dróg S_i . Drogi S_i należy zwiększać o ok. 10 cm, weryfikując wynik poprzez dokładny pomiar odległości.
5. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli.

		t_1	t_2	$\dots t_n$	t_{sr}	t^2
m_i	S_1					
	:					
	:					
	S_i					

II. Opracowanie wyników.

1. Wyznaczyć średni czas ruchu t_{sr} [1,2] dla danego obciążnika i kolejnych dróg S_i .
2. Metodą regresji liniowej (najmniejszych kwadratów) znaleźć współczynnik kierunkowy prostej $S=f(t^2)$.
3. Porównując wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $S = \frac{at^2}{2}$ (prędkość początkowa $v_0 = 0$) ze wzorem na funkcję liniową $y=Ax$, otrzymujemy zależność na przyspieszenie układu: $a = 2A$.
4. Nanieść na wykres punkty doświadczalne oraz sporządzić wykresy teoretyczne funkcji $S=f(t)$ i $S=f(t^2)$ dla danej masy. Jeśli to jest możliwe, zaznaczyć na wykresie błędy pomiarowe.
5. Przedstawić wyniki końcowe przyspieszenia w postaci:
 $a = a \pm \Delta a$

CZĘŚĆ 2

I. Wykonanie pomiarów:

1. Ustawić podstawkę P w takim położeniu aby droga S_1 wynosiła około 60cm.
2. Pomiary opisane w punkcie 3 Części 1 powtórzyć dla pozostałych obciążników.
3. Wyniki zapisać w tabeli.

	t_1	t_2		t_n	t_{sr}	σ
m_1						
m_2						
m_3						
$m_1 + m_2$						
$m_1 + m_3$						

II. Opracowanie wyników.

1. Obliczyć średni błąd kwadratowy σ [1] każdego średniego czasu ruchu t_{sr} .
2. Korzystając ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym [3], obliczyć przyspieszenia dla zadanej drogi i różnych mas.
3. Wyniki obliczeń zapisać w tabeli (Δa - błąd pojedynczego pomiaru).

m	m_1		m_i
a			
Δa			

4. Metodą regresji liniowej (najmniejszych kwadratów) dopasować prostą $a = f(m)$ i wyliczyć m_0 jako punkt przecięcia prostej z osią ox oraz błąd wielkości m_0 .

5. Nanieść na wykres punkty doświadczalne oraz sporządzić wykres teoretyczny funkcji $a=f(m)$.
6. Na podstawie wzoru $M_t = m_0 g R$, obliczyć wartość momentu sił tarcia oraz błąd momentu sił tarcia
 $\Delta M_t = \Delta m_0 g R$. $R = 7.7 \text{ cm}$
7. Przedstawić wyniki końcowe przyspieszenia dla wybranej masy oraz momentu sił tarcia w postaci:
 $a = a \pm \Delta a \quad \text{oraz} \quad M_t = M_t \pm \Delta M_t$

Wymagane zagadnienia teoretyczne:

1. Ruch prostoliniowy jednostajny i jednostajnie przyspieszony: wzory na drogę, prędkość oraz przyspieszenie.
2. Ruch obrotowy jednostajny i jednostajnie przyspieszony: pojęcia prędkości i przyspieszenia dla tego rodzaju ruchu.
3. Dynamika ruchu postępowego:
 - a) Prawa dynamiki Newtona.
 - b) Równania ruchu: pojęcia siły tarcia, współczynnika tarcia.
4. Dynamika ruchu obrotowego.
 - a) Prawa dynamiki dla ruchu obrotowego.
 - b) Równania ruchu: pojęcie momentu bezwładności, momentu siły.

Literatura:

- [1] T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, PWN 1975
- [2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1989
- [3] R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka, tom 1*, PWN, Warszawa 2003

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Kiedy wykonujemy serię pomiarów wielkości y w zależności od innej wielkości x otrzymując wyniki $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ i przewidujemy że y i x są związane liniowo, to interesuje nas znalezienie takiej linii prostej $y = Ax + B$ która jest najlepiej dopasowana do wyników pomiarów. Jest to równoważne znalezieniu najlepszego przybliżenia stałych A i B opartego na otrzymanych wynikach. Jeśli dwie zmienne y i x są powiązane relacją liniową postaci:

$$y = Ax + B \quad (1)$$

to wykres tej zależności jest prostą o nachyleniu A , przecinającą oś y w punkcie $y = B$ a oś x w punkcie $x_0 = -B/A$. Jedną z metod dopasowania takiej prostej jest zastosowanie metody największego prawdopodobieństwa. W przypadku normalnego rozkładu wyników pomiarów metoda ta sprowadza się do tzw. metody najmniejszych kwadratów.

Zarówno wyniki pomiarów x jak i y obarczone są pewnymi błędami ale dla uproszczenia dyskusji zakładamy że błędy wielkości x są zanedbywalnie małe. Zakładamy, że wyniki pomiarów wielkości y podlegają rozkładowi normalnemu (Gaussa) wokół swojej prawdziwej wartości, a losowy rozrzut zmiennej y opisany jest odchyleniem standardowym σ_y . Tak więc prawdopodobieństwo otrzymania zmierzonej wartości y_i jest proporcjonalne do wielkości:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - Ax_i - B)^2 / 2\sigma_y^2} \quad (2)$$

gdzie indeksy A i B wskazują, że prawdopodobieństwo to zależy od wartości nieznanych parametrów A i B. Prawdopodobieństwo otrzymania zbioru wyników $y_1, y_2, \dots, y_N$ jest równe iloczynowi tych prawdopodobieństw

$$P_{A,B}(y_1, \dots, y_N) = P_{A,B}(y_1) \dots P_{A,B}(y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}, \quad (3)$$

gdzie χ^2 określone jest wzorem:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - Ax_i - B)^2}{\sigma_y^2} \quad (4)$$

Prawdopodobieństwo to jest największe kiedy χ^2 jest najmniejsze. Aby znaleźć wartości A i B, różniczkujemy χ^2 względem tych parametrów i przyrównujemy otrzymane pochodne do zera:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N x_i (y_i - Ax_i - B) = 0 \quad (6)$$

Równania te można napisać w postaci układu równań na parametry A i B:

$$A \sum x_i + BN = \sum y_i \quad (7)$$

$$B \sum x_i + A \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \quad (8)$$

Rozwiązanie tych równań daje nam najlepsze, w sensie metody najmniejszych kwadratów, przybliżenie stałych A i B:

$$A = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (9)$$

$$B = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (10)$$

Gdy prosta przechodzi przez punkt zero, wzór na współczynnik kierunkowy A redukuje się do wzoru:

$$A = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Mając wyznaczone stałe A i B można, korzystając z prawa propagacji błędów [1], określić błędy wyznaczenia stałych A i B (σ_A, σ_B) oraz błąd wyznaczenia x_0 (δx_0). Wynoszą one odpowiednio:

$$\sigma_A^2 = \frac{N\sigma^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (11)$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (12)$$

$$\text{gdzie} \quad \sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - Ax_i - B)^2 \quad (13)$$

oraz

$$\delta x_0 = |x_0| \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2} \quad (14)$$

W ten sposób stosując metodę najmniejszych kwadratów można wyznaczyć zarówno wartości parametrów szukanej prostej $y = Ax+B$, jak i ich błędy.