

Opracowanie wyników pomiarów

Praca w laboratorium fizycznym polega na wykonaniu pomiarów, ich interpretacji i wyciągnięciu wniosków. Aby dojść do właściwych wniosków należy szczególną uwagę zwrócić na poprawność wykonania pomiarów i minimalizacji błędów pomiarowych. Bardzo ważnym elementem pracy w laboratorium jest prezentacja wyników i ich interpretacja. Przedstawienie uzyskanych rezultatów przejrzystości i zgodnie z ogólnie przyjętymi zasadami ułatwia prawidłową interpretację wyników pomiarowych.

Najczęstszym zadaniem stojącym przed studentem wykonującym pomiary jest fakt, że wynik pomiaru na ogół nie pokrywa się z jej wartością mierzoną. Przyczyny tego faktu mogą być różne i różnie się mogą one objawiać. Jeśli wyniki pomiarów wykazują systematyczne przesunięcie w stosunku do wartości rzeczywistej lub odznaczają się niepowtarzalnością przekraczającą znacznie dokładność przyrządów pomiarowych, wówczas mówimy, że są one obciążone błędami pomiarowymi. Mówimy o błędach systematycznych i przypadkowych (gruby, pomyłka). Oczywiście możemy je, jeśli nie wyeliminować to zminimalizować i możemy to zrobić poprzez:

1. Użycie właściwie działających przyrządów pomiarowych.
2. Poprawne przeprowadzenie pomiarów.
3. Stosowanie poprawek matematycznych do wzorów przybliżonych.
4. Usunięcie z serii pomiarowej wyniku obciążonego błędem grubym.

Eliminacja źródeł błędów opisanych powyżej niestety nie prowadzi do wyników jednoznacznie pokrywających się z rzeczywistością. **Każdy pomiar jest obciążony niepewnością pomiarową.**

Rozróżniamy:

- niepewność przypadkowe (błąd przypadkowy, losowy)
- niepewności systematyczne.

W seriach pomiarowych otrzymujemy „rozrzut” wyników, świadczy to o dominacji niepewności przypadkowych. Źródłem takich błędów jest sama wielkość mierzona jak i sam eksperymentator.

PREZENTACJA REZULTATÓW

Wyznaczoną wielkość fizyczną prezentujemy z odpowiednią dokładnością wraz z przedziałem niepewności wynikłej ze stosowanej metody, użytych przyrządów pomiarowych czy też własności obiektu mierzonego.

Wyniki pomiarów podajemy wraz z niepewnością bezwzględną i względną.

Bezwzględna niepewność pomiarową Δy określa, o ile wynik pomiaru y może różnić się od rzeczywistej wartości y_0

$$|y - y_0| \leq \Delta y$$

Ponieważ wartość rzeczywista zawarta jest w Δy wynik nasz zapisujemy:

$$y_0 = y \pm \Delta y.$$

Niepewność względną określamy jako stosunek niepewności bezwzględnej do wartości wyniku i wyrażamy w procentach

$$\Delta y_{\text{wzgl.}} = \frac{\Delta y}{y} 100\%$$

Wskazane jest by prezentując wyniki przedstawiać błąd bezwzględny i względny.

Końcowe wyniki należy podawać we właściwych jednostkach i z właściwą precyzją.

O precyzji zapisu wyniku świadczy ilość zawartych w niej cyfr znaczących (1...9), zero jest znaczące tylko w przypadku, gdy znajduje się między dwiema cyframi lub na dowolnym miejscu po cyfrze niebędącej zerem, ale zawartej w liczbie z przecinkiem (300 możemy zapisać jako $3 \cdot 10^2$ – jedno miejsce znaczące, chcąc zaznaczyć trzy miejsca znaczące zapiszemy jako $3,00 \cdot 10^2$)

Niepewności pomiarowe prezentujemy z dokładnością co najwyżej do dwóch miejsc znaczących.

Wynik pomiaru zaokrąglamy zawsze do takiej samej liczby miejsc znaczących z jaką podajemy niepewność pomiarową.

Przykład: temperatura – $(293 \pm 1)\text{K}$, $\Delta T_{\text{wzgl.}} = 0,3\%$

Zasady sporządzania wykresów.

Wykresy odzwierciedlają przeprowadzone pomiary informując o związkach funkcyjnych, a także o błędach pomiarowych. Przygotowując wykres należy zwrócić uwagę na poniższe wyszczególnienie:

1. Wartości zmiennej niezależnej powinny być odkładane na osi poziomej X. Obie osie powinny być oznaczone symbolem lub nazwą zmiennej wraz z nazwa lub symbolem jednostki w jakiej jest ona wyrażona.
2. Skale obu osi powinny być tak dobrane, aby krzywa wykresu przebiegała możliwie przez całą jego powierzchnię. Oznacza to, że nie muszą one zaczynać się od zera, tylko od wartości nieco mniejszej od najmniejszej zmierzonej wartości. Podziałki skali powinny być wyraźnie zaznaczone i tak dobrane, aby umożliwiały łatwe odczytanie jakiegokolwiek punktu na wykresie.
3. Punkty doświadczalne powinny być przedstawione w taki sposób, aby były widoczne na tle przeprowadzonej krzywej. Wielkość zaznaczonego punktu (prostokąt, krzyżyk) powinna odpowiadać wartości niepewności.

4. Na wykresie należy zaznaczyć niepewności pomiarowe reprezentowane przez poszczególne punkty. Jeśli tylko jedna wielkość jest obarczona niepewnością, np. zmienna zależna Y, to zaznaczamy to pionową kreską o długości $2\Delta y$, której środek przypada w danym punkcie. W przypadku, gdy obie zmienne obarczone są niepewnościami pomiarowymi, zaznaczamy to w postaci krzyżyka o ramionach $2\Delta x$ i $2\Delta y$, na przecięciu których znajduje się punkt reprezentujący dany pomiar.
5. Prowadząc krzywą, mającą określić charakter przebiegu punktów doświadczalnych, należy przede wszystkim zwrócić uwagę na wielkości niepewności pomiarowych. Punkty wytyczające krzywą nie muszą na niej leżeć, a powinny być raczej równomiernie rozmieszczone powyżej i poniżej krzywej. Należy jednak dbać o to, by krzywa mieściła się w granicach zaznaczonych niepewności pomiarowych.
6. Wykres tworzymy rysując linię która nie powinna mieć ostrych załamań i przebiegać jak najbliżej punktów pomiarowych.

Metody obliczeń błędów:

W zależności od sposobu pomiaru wielkości mierzonej obliczenia błędów dzielimy na dwie grupy: bezpośredni pomiar wielkości fizycznej, np. wysokość krzesła – **pomiary bezpośrednie**, pomiary na podstawie których wyliczamy poszukiwaną wielkość – **pomiary pośrednie**.

Błąd bezpośredni:

Wartość rzeczywistą x_0 najlepiej przybliża wartość średnia arytmetyczna $\bar{x}$ (wartość oczekiwana)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

σ - określa rozrzut wyników wokół wartości rzeczywistej x_0 przybliżamy wielkością σ_x liczoną na podstawie wzoru

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)^2}{n}}$$

Ponieważ nie znamy jednak wartości rzeczywistej x_0 , a jedynie jej oszacowanie przez średnią arytmetyczną, posłużymy się zatem wzorem

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Tak zdefiniowana niepewność pomiarowa nosi nazwę odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru; stosuje się również nazwę średniego błędu kwadratowego. Wykonując pomiary istotna jest rozbieżność między wartościami x_0 i $\bar{x}$. Wielkością oceniającą tę rozbieżność jest odchylenie standardowe średniej, noszące również nazwę średniego błędu kwadratowego średniej, zdefiniowane wzorem.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{(n-1)n}}$$

Błąd z pomiarów pośrednich:

Chcąc wyznaczyć niepewność systematyczną wielkości $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, musimy obliczyć zmianę ΔY tej funkcji spowodowaną zmianami jej argumentów o $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, które to wielkości są niepewnościami systematycznymi mierzonych bezpośrednio wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$. Wyznaczana wielkość $Y = f(x)$ jest funkcją tylko jednej zmiennej x obciążonej niepewnością pomiarową $\pm \Delta x$. Chcemy obliczyć zmianę $\pm \Delta Y$ funkcji $f(x)$ przy zmianie jej argumentu o $\pm \Delta x$.

$$Y \pm \Delta Y = f(x \pm \Delta x)$$

Stosując rozwinięcie Taylora

$$Y \pm \Delta Y = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Ponieważ $Y = f(x)$ otrzymujemy

$$\Delta Y = \frac{df(x)}{dx} \Delta x$$

gdzie zaniedbaliśmy wyrazy w których Δx występuje w wyższych potęgach.

Uogólniając ten przypadek na funkcję zmiennych $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i postępując w ten sam sposób jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, otrzymujemy

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots$$

Występujące we wzorze symbole nazywamy pochodnymi cząstkowymi. Oblicza się je w taki sam sposób jak zwykłe pochodne funkcji jednej zmiennej przy założeniu, że zmienną jest tylko x_1 , a pozostałe zmienne są wielkościami stałymi.

Powyższe wyrażenie przypomina różniczkę zupełną, dlatego często ten sposób obliczania niepewności nazywamy **metodą różniczki zupełnej**. W rzeczywistości różni się ono od różniczki zupełnej występowaniem we wzorze bezwzględnych wartości pochodnych cząstkowych i przyrostów zmiennych

Omawiane metody obliczania niepewności wielkości złożonych stosowane są, gdy niepewności systematyczne pomiarów bezpośrednich są znacznie większe od niepewności przypadkowych. Zakładamy przy tym najbardziej niekorzystną z punktu widzenia eksperymentatora sytuację, w której niepewności pomiarów bezpośrednich nie kompensują się nawzajem. Dlatego w ten sposób wyznaczamy **maksymalne systematyczne niepewności pomiarowe, noszące również nazwę błędów maksymalnych**.

Literatura:

H. Szydłowski: Pomiary fizyczne. PWN, Warszawa 1979 r.

H. Szydłowski: Pracownia fizyczna. PWN, Warszawa 1975 r.

T. Dryński: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki. PWN, Warszawa 1967 r.

GRAFICZNE OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Kiedy wykonujemy serię pomiarów wielkości y w zależności od innej wielkości x otrzymując wyniki $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ i przewidujemy że y i x są związane liniowo, to interesuje nas znalezienie takiej linii prostej $y = Ax + B$ która jest najlepiej dopasowana do wyników pomiarów. Jest to równoważne znalezieniu najlepszego przybliżenia stałych A i B opartego na otrzymanych wynikach. Jeśli dwie zmienne y i x są powiązane relacją liniową postaci:

$$y = Ax + B \quad (1)$$

to wykres tej zależności jest prostą o nachyleniu A , przecinającą oś y w punkcie $y = B$ a oś x w punkcie $x_0 = -B/A$. Jedną z metod dopasowania takiej prostej jest zastosowanie metody największego prawdopodobieństwa. W przypadku normalnego rozkładu wyników pomiarów metoda ta sprowadza się do tzw. metody najmniejszych kwadratów.

Zarówno wyniki pomiarów x jak i y obarczone są pewnymi błędami ale dla uproszczenia dyskusji zakładamy że błędy wielkości x są zanedbywalnie małe. Zakładamy, że wyniki pomiarów wielkości y podlegają rozkładowi normalnemu (Gausa) wokół swojej prawdziwej wartości, a losowy rozrzut zmiennej y opisany jest odchyleniem standardowym σ_y . Tak więc prawdopodobieństwo otrzymania zmierzonej wartości y_i jest proporcjonalne do wielkości:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - Ax_i - B)^2 / 2\sigma_y^2} \quad (2)$$

gdzie indeksy A i B wskazują, że prawdopodobieństwo to zależy od wartości nieznanymi parametrów A i B . Prawdopodobieństwo otrzymania zbioru wyników $y_1, y_2, \dots, y_N$ jest równe iloczynowi tych prawdopodobieństw

$$P_{A,B}(y_1, \dots, y_N) = P_{A,B}(y_1) \dots P_{A,B}(y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}, \quad (3)$$

gdzie χ^2 określone jest wzorem:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - Ax_i - B)^2}{\sigma_y^2} \quad (4)$$

Prawdopodobieństwo to jest największe kiedy χ^2 jest najmniejsze. Aby znaleźć wartości A i B , różniczkujemy χ^2 względem tych parametrów i przyrównujemy otrzymane pochodne do zera:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N x_i (y_i - Ax_i - B) = 0 \quad (6)$$

Równania te można napisać w postaci układu równań na parametry A i B:

$$A \sum x_i + BN = \sum y_i \quad (7)$$

$$B \sum x_i + A \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \quad (8)$$

Rozwiązanie tych równań daje nam najlepsze, w sensie metody najmniejszych kwadratów, przybliżenie stałych A i B:

$$A = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (9)$$

$$B = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (10)$$

Mając wyznaczone stałe A i B można, korzystając z prawa propagacji błędów [1], określić błędy wyznaczenia stałych A i B (σ_A, σ_B) oraz błąd wyznaczenia x_0 (δx_0). Wynoszą one odpowiednio:

$$\sigma_A^2 = \frac{N\sigma^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (11)$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (12)$$

$$\text{gdzie } \sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - Ax_i - B)^2 \quad (13)$$

oraz

$$\delta x_0 = |x_0| \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2} \quad (14)$$

W ten sposób stosując metodę najmniejszych kwadratów można wyznaczyć zarówno wartości parametrów szukanej prostej $y = Ax+B$, jak i ich błędy.

PRZYKŁAD: Wyznaczanie temperatury zera bezwzględnego.

Jeśli gaz idealny umieścimy w naczyniu o stałej objętości, to jego temperatura T jest liniową funkcją ciśnienia P (przemiana izochoryczna),

$$T = AP + B \quad (14)$$

gdzie:

A – stała zależna od masy i objętości gazu.

B – temperatura zera bezwzględnego, mierzona w $^{\circ}\text{C}$.

Zbiór pięciu wyników pomiarów przedstawia poniższa tabela:

Numer pomiaru I	Ciśnienie P_i (mm Hg)	Temperatura T_i ($^{\circ}\text{C}$)	$AP_i + B$
1	65	-20	-22,2
2	75	17	14,9
3	85	42	52,0
4	95	94	89,1
5	105	127	126,2

Zakładając, że punkty pomiarowe powinny układać się na prostej postaci $T = AP + B$ należy skorzystać ze wzorów (9) i (10) zastępując jedynie x_i przez P_i i y_i przez T_i .

$$A = \frac{N(\sum P_i T_i) - (\sum P_i)(\sum T_i)}{N(\sum P_i^2) - (\sum P_i)^2} = 3.71$$

$$B = \frac{(\sum P_i^2)(\sum T_i) - (\sum P_i)(\sum P_i T_i)}{N(\sum P_i^2) - (\sum P_i)^2} = -263^{\circ}\text{C}$$

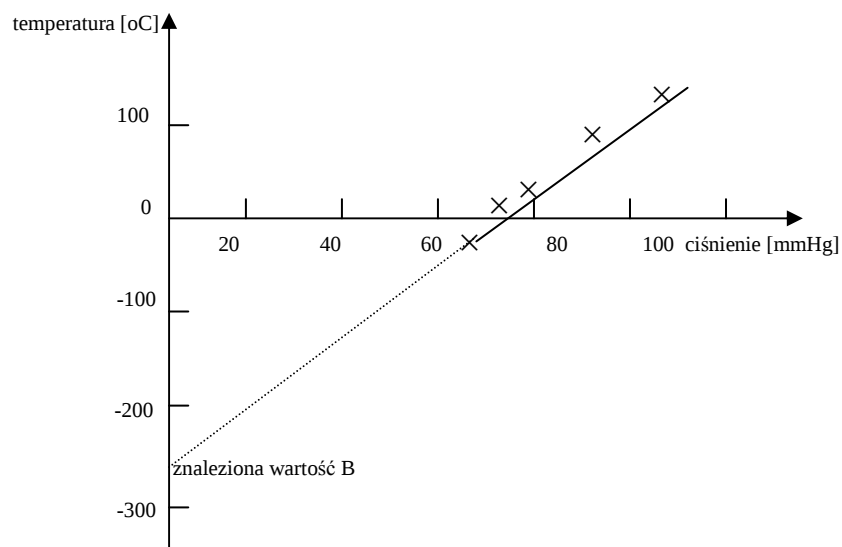
W ten sposób otrzymaliśmy najlepsze (według metody najmniejszych kwadratów) przybliżenie temperatury zera bezwzględnego $B = -263^{\circ}\text{C}$. Znając stałe A i B , można następnie obliczyć wartości $AP_i + B$, temperatury „oczekiwanej” na podstawie najlepszego dopasowania wyników prostą $T = AP + B$. Wyniki tego rachunku przedstawione są w ostatniej kolumnie tabeli. Można teraz obliczyć różnice między liczbami w ostatnich dwóch kolumnach tabeli i znaleźć

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum (T_i - AP_i - B)^2$$

co daje odchylenie standardowe $\sigma = 6^{\circ}\text{C}$. Korzystając ze wzoru (11) można teraz obliczyć błąd wyznaczenia B

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma_T^2 (\sum P_i^2)}{N(\sum P_i^2) - (\sum P_i)^2} = 331(^{\circ}\text{C})^2$$

stąd $\sigma_B = 18^{\circ}\text{C}$. Wyniki powyższe stają się bardziej czytelne jeżeli naniesie się je na wykres.



Aby znaleźć wartość zera bezwzględnego, prostą przedłużono poza wszystkie punkty pomiarowe, aż do przecięcia z osią T. Zatem ostateczny wynik wynosi $B = -263 \pm 18^{\circ}\text{C}$, co zgadza się z wartością tablicową -273°C .

Literatura:

[1] J.R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowych*, PWN, Warszawa 1995.